E.N.S.A. INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ la série entière dont la somme est e^x. Dans ce problème, x sera un réel $\geqslant 0$. Pour x fixé, on désigne par q l'unique entier, tel que :

$$q \leqslant x < q + 1 .$$

p désignera toujours un entier (non fixé) $\geqslant 0$.

1. Questions préliminaires.

1.1. Calculer :

$$\lim \left(1 + \frac{x}{p}\right)^p \qquad (p \to + \infty) .$$

1.2. Établir :

$$\lim \frac{1}{p}\left[\operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{p}\right) + \operatorname{Log}\left(1 + \frac{2}{p}\right) + \ldots + \operatorname{Log}\left(1 + \frac{p+1}{p}\right)\right] = \operatorname{Log} 4 - 1 \qquad (p \to + \infty) .$$

1.3. Calculer :

$$\lim \left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{2}{p}\right) \ldots \left(1 + \frac{p+1}{p}\right) \qquad (p \to + \infty) .$$

1.4. Montrer que l'entier q est tel que :

$$\forall n \leqslant q : \qquad a_n x^n \leqslant a_q x^q$$

$$\forall n > q \text{ et } x \neq 0 : \qquad a_n x^n < a_q x^q$$

On notera : $m(x) = a_q x^q$. Comment pouvez-vous qualifier $m(x)$ parmi les termes de la série?

Montrer que la fonction m est continue sur $[0, + \infty[$.

2. L'objet de ce paragraphe est de comparer

$$e^x \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leqslant n \leqslant 2q} a_n x^n = S_{2q}(x) .$$

On posera :

$$R_{2q}(x) = e^x - S_{2q}(x) .$$

2.1. On suppose d'abord $x = p$ entier > 0. On pose :

$$S_{2p}(p) = S_{2p} \quad \text{et} \quad R_{2p}(p) = R_{2p} = e^p - S_{2p} .$$

2.1.1. Établir :

$$R_{2p} < 2 \cdot \frac{p^{2p+1}}{(2p+1)!} .$$

2.1.2. Établir :

$$\lim \frac{R_{2p}}{m(p)} = 0 , \quad \text{puis :} \quad \lim \frac{R_{2p}}{S_{2p}} = 0 \qquad (p \to +\infty) .$$

2.1.3. Enfin : $e^p \sim S_{2p}$ $\quad (p \to +\infty)$.

2.2. On suppose ici : x réel $\geqslant 2$; alors $x < \frac{3}{2} q$.

2.2.1. Établir :

$$R_{2q}(x) < 4 \cdot \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} .$$

2.2.2. Établir :

$$\lim \frac{R_{2q}(x)}{m(x)} = 0 \qquad (x \to +\infty) .$$

2.2.3. Établir : $S_{2q}(x) \sim e^x$ $\quad (x \to +\infty)$.

3. On veut comparer le terme maximal $m(x)$ à la somme de la série.

3.1. Pour cela on étudie : $f(x) = m(x) \cdot e^{-x}$. Établir que :

f est continue, décroissante sur $[0, +\infty[$. En déduire que $f(x)$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

(On ne calculera cette limite qu'en 3.2.5.).

3.2. On définit :

$$g(x) = m(x) . e^{-x} . \sqrt{x} :$$

g est continue sur $[0, +\infty[$ comme produit de 3 fonctions continues.

3.2.1. Étudier la variation de g sur l'intervalle $[p, p+1]$.

3.2.2. Calculer :

$$\lim \frac{g(p+\frac{1}{2})}{g(p)} \quad \text{et} \quad \lim \frac{g(p+\frac{1}{2})}{g(p+1)} \qquad (p \to +\infty) .$$

On pose :

$$h(p) = \frac{\sup g(x)}{\inf g(x)} \qquad (p \leqslant x \leqslant p+1) .$$

Montrer que : $\lim h(p) = +1$ $\quad (p \to +\infty)$.

3.2.3. Donner un développement limité de :

$$\frac{g(p+\frac{1}{2})}{g(p-\frac{1}{2})}$$

selon les puissances de $\frac{1}{p}$, quand $p \to +\infty$. En déduire que $g(p+\frac{1}{2})$, puis $g(x)$, ont une limite finie quand $p \to +\infty$, puis $x \to +\infty$.

3.2.4. Montrer que la suite de terme général $g(p)$ est croissante, au moins à partir d'un certain rang; en déduire que :

$$a = \lim g(x) > 0 \qquad (x \to +\infty) .$$

3.2.5. Donner un équivalent simple de $f(x)$ $\quad (x \to +\infty)$; et répondre à la question posée en tête du § 3.

[On ne cherchera pas à évaluer la limite a].

N.B. — *Il est rappelé aux candidats que, dans l'attribution de la note, il sera tenu compte de la clarté, de la précision et de la concision de l'exposé, ainsi que de sa présentation.*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail